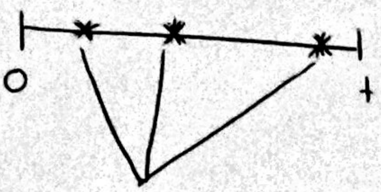
$$P_X(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \quad x=0,1,2,\ldots$$



αφίξεις Poisson

X = πλήθος αφίξεων.

Παράδειγμα.

Ρυθμός κλήσεων = 30 κλήσεις / hour

α) P(καμία κλήση στα 3 min) = ?

β) P(περισσότερες από 5 κλήσεις στα 5 min) = ?

Λύση

Έστω X πλήθος κλήσεων (Ορίζουμε την X σε μονάδες χρόνου στις οποίες εκφράζεται η ζητούμενη πιθανότητα)

α) X εκφράζει πλήθος κλήσεων στα 3 min.

$X \sim P(\lambda=?)$ στη 1h = 60 min 30 κλήσεις

3 min $\lambda = ?$

$$\lambda = \frac{3 \times 30}{60} = 1{,}5$$

Άρα $X \sim P(\lambda=1{,}5)$

$$P_X(x) = \frac{e^{-1{,}5}(1{,}5)^{x}}{x!} \quad x=0,1,\ldots$$

P(καμία κλήση στα 3 min) $= P(X=0) = P_X(0) = \frac{e^{-1,5}(1,5)^0}{0!} = e^{-1,5}$

β) Έστω X πλήθος κλήσεων στα 5 min.

$X \sim P(\lambda = ?)$ Στα 60 min 30 κλ.

5 $\lambda = ?$

$\lambda = \frac{30 \times 5}{60} = 2,5$

$P_X(x) = \frac{e^{-2,5}(2,5)^x}{x!}$ $x = 0, 1, \ldots$

P(περισσότερες από 5 κλήσεις στα 5 min) $= P(X \geq 5) = \begin{cases} \sum_{x=5}^{\infty} P_X(x) \\ 1 - P(X<5) = \\ = 1 - \sum_{x=0}^{4} \frac{e^{-2,5}(2,5)^x}{x!} \end{cases}$

Παράδειγμα.

Είναι γνωστό σε είναι δασολόγο ότι σε μια περιοχή υπάρχουν 100 δέντρα συγκεκριμένου τύπου ανά στρέμμα (στρέμμα $\simeq 1000 m^2$) Ποια η πιθανότητα σε μια περιοχή 50 m² του δάσους:

α) Να υπάρχουν λιγότερα από 8 δέντρα?

β) Να υπάρχουν μεταξύ 3 και 5 δέντρων?

Λύση

Έστω X τ.μ. παριστά πλήθος δέντρων στα 50 m²

$X \sim P(\lambda = ?)$

Στα 1000 m² 100 δέντρα

50 m² x?

$x = \frac{50 \times 100}{1000} = 5$

Άρα $X \sim P(\lambda = 5)$

$P_X(x) = \frac{e^{-5} \cdot 5^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \ldots$

α) $P(X<8) = \sum_{x=0}^{7} P_X(x) = \sum_{x=0}^{7} \frac{e^{-5} 5^x}{x!}$

β) $P(3 \leq X \leq 5) = \sum_{x=3}^{5} \frac{e^{-5} 5^x}{x!} = \ldots$

Παράδειγμα

Σε μια σχολική εκδρομή συμμετέχουν 8 μαθητές της ομάδας Α και 6 μαθητές της Β. 4 από τους 14 συμμετέχοντες επιλέγονται στην τύχη χωρίς επανατοποθέτηση.

α) Ποια η πιθανότητα στους 4 που θα επιλεγούν οι μαθητές της Α ομάδας να είναι τριπλάσιοι από τους μαθητές της Β?

β) Αν η ίδια διαδικασία επαναληφθεί 5 φορές ποια η πιθανότητα 2 φορές οι μαθητές της Α να είναι τριπλάσιοι από τους Β)

γ) Ποια η πιθανότητα η διαδικασία να επαναληφθεί 3 φορές μέχρις ότου για πρώτη φορά οι μαθητές της Α τριπλάσιοι ~~μαθ~~ από τους Β)

Λύση

α) Έστω Χ πλήθος των μαθητών της Α στους 4

$X \sim Hg(M=8, N=6, n=4)$

$$P(X=3) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N}{n-x}}{\binom{M+N}{n}} = \frac{\binom{8}{3}\binom{6}{1}}{\binom{14}{4}} = 0{,}3357$$

β) Έστω $E = \{$σε οποιαδήποτε επανάληψη οι μαθητές της Α τριπλάσιοι μαθητών Β

Έστω Χ τ.μ. παριστά το πλήθος των Ε στις $n=5$ επαναλήψεις$\}$

$X \sim B(n=5, p=P(E)=0{,}3357)$

$$P_X(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \qquad x = 0, \ldots, n$$

$$P(X=2) = P_X(2) = \binom{5}{2} 0{,}3357^2 \cdot 0{,}6443^3$$

δ) Έστω Y= πλήθος επαναλήψεων μέχρι για πρώτη φορά να εμφανιστεί E.

$Y \sim Geo(p = P(E) = 0{,}3357)$

$P_X(y) = p q^{y-1}$, $y = 1, 2, \dots$

$P(Y=3) = P_Y(3) = 0{,}3357 \times 0{,}6443^2$

Παράδειγμα

Η πιθανότητα ένα άτομο να είναι φορέας ενός ιού είναι 10^{-3}

α) Ένας γιατρός εξετάζει άτομα μέχρι να εντοπίσει τον πρώτο φορέα. Ποια η πιθανότητα να εξετάσει 100 άτομα?

β) Ποια η πιθανότητα να εξετάσει 250 άτομα μέχρι να εντοπίσει τον 5ο φορέα?

Λύση

$E = \{φορέας\}$

α) X= πλήθος ατόμων που εξετάζει μέχρι να εντοπίσει τον 1ο φορέα (1η E)

$X \sim Geo\left(p = P(E) = \frac{1}{1000}\right)$

$P_X(x) = p q^{x-1}$, $q = 1-p$, $x = 1, 2, \dots$

$P(100 \text{ άτομα}) = P(X=100) = P_X(100) = \left(\frac{1}{1000}\right)\left(\frac{900}{1000}\right)^{100-1} = 9 \times 10^{-4}$

β) Έστω Y= πλήθος ατόμων που εξετάζει μέχρι να εντοπίσει τον 5ο φορέα

$Y \sim NB\left(k=5, p = P(E) = \frac{1}{1000}\right)$

$P_Y(y) = \binom{y-1}{k-1} p^k q^{y-k}$ $y = k, k+1, \dots$

Ζητώ $P(Y=250) = \binom{250-1}{5-1}\left(\frac{1}{1000}\right)^5\left(\frac{999}{1000}\right)^{250-5} = 122 \times 10^{-9}$

Παράδειγμα

Η ρώσικη ρουλέτα είναι ένα τυχερό παιχνίδι στο οποίο μια σφαίρα τοποθετείται σε έναν από τους 6 θαλάμους του περίστροφου. Ο μύλος περιστρέφεται τυχαία και ο παίκτης πατά την σκανδάλη σημαδεύοντας στον αέρα (ας πούμε)

α) Ποια η πιθανότητα να μην εκπυρσοκροτήσει το όπλο αν επαναλάβει την διαδικασία 10 φορές.

β) Αν ο παίκτης επαναλαμβάνει συνεχώς την διαδικασία ποια η πιθανότητα να εκπυρσοκροτήσει το όπλο την $4^{η}$ φορά?

Λύση

έστω $E = \{$να εκπυρσοκροτήσει$\}$

α) έστω X τ.μ παριστά το πλήθος των φορών που εκπυρσ. σε 10 φορές.

$X \sim B(n=10, p = P(E) = \frac{1}{6})$

$P(X=0) = P_X(0) = \binom{10}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^{10-0} = 0{,}1615$

β) Y πλήθος επαναλήψεων μέχρι να εκπυρσο. για $1^{η}$ φορά

$Y \sim Geo(p = P(E) = \frac{1}{6})$

ζητώ $P(Y=4) = P_Y(4) = \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0{,}0964$

ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

Ομοιόμορφη Κατανομή

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η τ.μ. X λέγεται ομοιόμορφη στο διάστημα (a,b), $a,b \in \mathbb{R}$ $a \leq b$ αν οι τιμές της ανήκουν στο (a,b) και η σ.π.π της X είναι:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Συμβολισμός $X \sim U(a,b)$

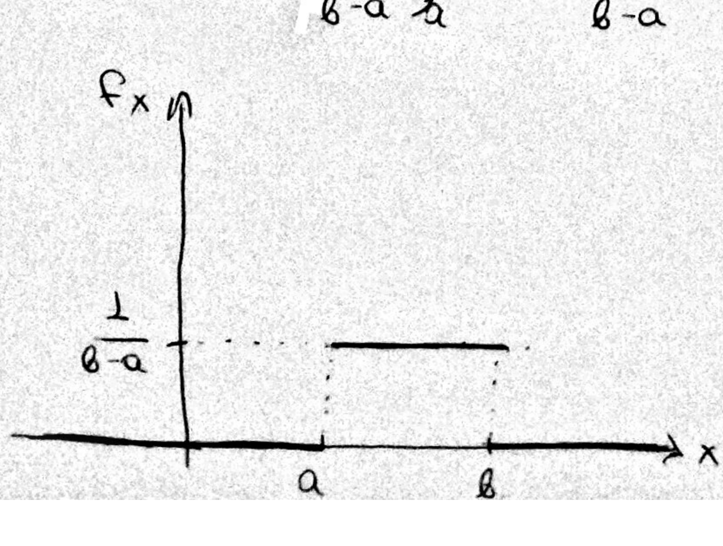
Διερεύνηση της Ομοιόμορφης Κατανομής

1) f_X είναι σ.π.π

i) $f_X(x) \geq 0$

ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} 0\,dx + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}\,dx + \int_{b}^{+\infty} 0\,dx =$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b dx = \frac{1}{b-a}(b-a) = 1$$

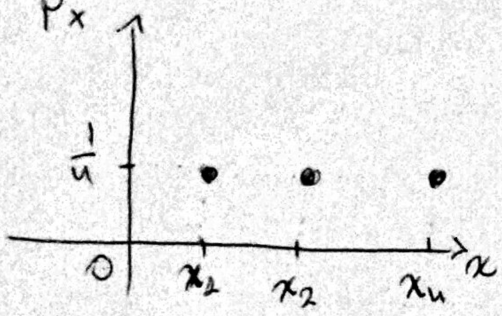
2) 

Παρατήρηση

Ομοιόμορφη διακριτή κατανομή

Έστω τ.μ. X με τιμές $x_1, x_2, \dots, x_n$ και σ.π. $P_X(x_i) = \frac{1}{n}$ $i=1,\dots,n$

(π.χ. κατανομή ζαριού)



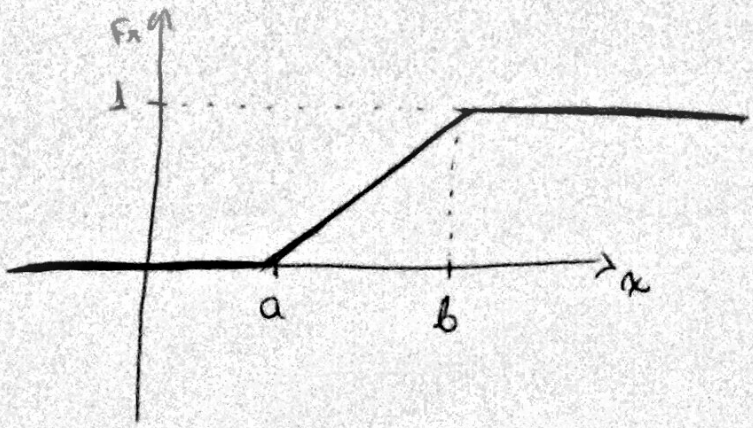
3) Εύρεση α.σ.κ.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & , a < x < b \\ 1 & , x \ge b \end{cases}$$

$\boxed{\text{Απόδειξη}}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_X(x) \overset{\text{ορ}}{=} P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0 & , x < a \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{a} f_X(t)dt + \int_{a}^{x} f_X(t)\,dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{a} 0\,dt}_{0} + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}\,dt = & \\ = \displaystyle\frac{1}{b-a}\int_{a}^{x} dt = \frac{1}{b-a}(x-a) & , a < x < b \\ \displaystyle\underbrace{\int_{-\infty}^{a} f_X(t)dt}_{0} + \int_{a}^{b} f_X(t)dt + \underbrace{\int_{b}^{x} f_X(t)dt}_{0} = \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}\,dt = \frac{1}{b-a}(b-a) = 1 & , x \ge b \end{cases}$$



4) Έστω $X \sim U(a,b)$ και έστω $(a_1,b_1) \subseteq (a,b)$ δηλ. (a_1,b_1) είναι υποδιάστημα του (a,b)

$$P(a_1 \leq x \leq b_1) = \begin{cases} F_X(b_1) - F_X(a_1) \\ \int_{a_1}^{b_1} f_X(x)\,dx = \dfrac{b_1-a_1}{b-a} = \dfrac{l}{b-a} \end{cases}, \quad l = b_1 - a_1$$

Άρα στην ομοιόμορφη κατανομή η πιθανότητα υποδιαστήματος εξαρτάται από το μήκος l του υποδιαστήματος.
Συνεπώς στην ομοιόμορφη κατανομή υποδιαστήματα ίσου μήκους έχουν ίδια πιθανότητα.

5) Ισχύει το αντίστροφο?. Ισχύει δηλαδή η παρακάτω πρόταση?
Έστω τ.μ. X με τιμές στο διάστημα (a,b). Αν όλα τα υποδιαστήματα του (a,b) ίσου μήκους έχουν ίδια πιθανότητα τότε $X \sim U(a,b)$

Απόδειξη

Θεώρημα Μέσης Τιμής.

Εφαρμογή Ομοιόμορφης Κατανομής

Ως μοντέλο που περιγράφει το χρόνο άφιξης συγκοινωνιακού μέσου σε στάση ή ανθρώπου σε ραντεβού.

Αν X χρόνος άφιξης Λεωφορείου $X \sim (8.00, 8.05)$